

7-Дәріс. Аналитикалық сигнал және кездейсоқ процестер

Мақсаты: Аналитикалық сигналдардың теориялық негіздерін, Гильберт түрлендіруін, кездейсоқ процестердің сипаттамаларын, олардың корреляциялық және спектралдық сипаттарын зерттеу. Сондай-ақ, Винер–Хинчин теоремасы, корреляция интервалы, тиімді спектр ені және шуыл модельдері қарастырылады.

Кіріспе

Қазіргі заманғы электрлік байланыс жүйелерінің негізінде сигналдарды тиімді өңдеу мен беру мәселелері жатыр. Бұл жүйелердің сапасы мен сенімділігі көбіне сигналдардың физикалық және статистикалық сипаттамаларын қаншалықты терең түсінуге байланысты. Осындай сипаттамаларды талдау үшін аналитикалық сигнал ұғымы мен кездейсоқ процестер теориясы маңызды рөл атқарады.

Аналитикалық сигнал — бұл байланыс теориясындағы күрделі (комплексі) сигналды сипаттаудың тиімді тәсілі. Ол нақты сигналдың амплитуда-фазалық құрылымын зерттеуге, жиілік сипаттамаларын анықтауға мүмкіндік береді. Гильберт түрлендіруі арқылы алынатын бұл сигнал фазалық және жиіліктік модуляцияларды сипаттауда кеңінен қолданылады.

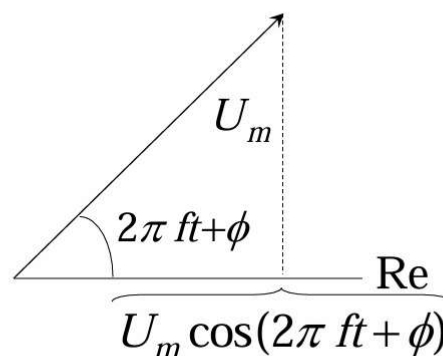
Байланыс арналары арқылы берілетін сигналдар көбінесе кездейсоқ сипатқа ие болады. Сондықтан, байланыс теориясында кездейсоқ процестерді, олардың стационарлығы мен автокорреляциялық қасиеттерін зерттеу аса өзекті. Бұл процестерді сипаттауда Винер–Хинчин теоремасы, спектрлік тығыздық функциясы, корреляция интервалы және тиімді спектр ені секілді ұғымдар пайдаланылады.

Осы лекцияда біз аналитикалық сигналдарды құру әдістерін, олардың спектралдық және уақыттық қасиеттерін, сондай-ақ кездейсоқ сигналдарды сипаттайтын негізгі математикалық аппаратты қарастырамыз. Сонымен қатар, ақ және квази-ақ шуыл модельдері мен сызықты жүйелердің сигналға әсері де егжей-тегжейлі түсіндіріледі.

1. Аналитикалық сигнал және комплекс амплитуда әдісі

Кез келген нақты сигналды аналитикалық формада көрсетуге болады: $x(t)=\text{Re}\{z(t)\}$, мұндағы $z(t)=U_m \cdot \exp(j(2\pi ft+\phi))$. Бұл көрсетілім сигналдың амплитудасы мен фазасын талдау үшін ыңғайлы (Сурет 1).

$$U_m \cos(2\pi ft + \phi) \longrightarrow U_m e^{j(2\pi ft + \phi)}$$



$$x(t) = \text{Re}\{z(t)\}$$

Сурет 1 - Нақты сигналдың аналитикалық немесе комплекстік түрі. Комплекстік экспонента арқылы жазу сигналдың амплитудасы мен фазасын бөлек қарастыруға мүмкіндік береді

Бұл 1 суретте **нақты сигналдарды** комплекстік формада көрсету не үшін қажет екенін бейнелейді:

- Комплекстік формада амплитуда мен фаза анық әрі ыңғайлы түрде беріледі.
- Бұл тәсіл модуляция, демодуляция, спектралдық талдау сияқты байланыс жүйелерінде өте тиімді.

2-суретте косинус сигналының комплекс экспоненталар арқылы жазылуы және аналитикалық сигналға өту процесі көрсетілген.

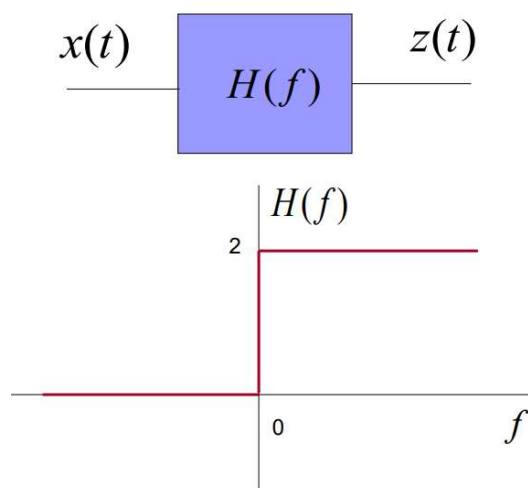
$$U_m \cos(2\pi ft + \phi) = U_m \frac{e^{j(2\pi ft + \phi)} + e^{-j(2\pi ft + \phi)}}{2}$$

$$U_m \cos(2\pi ft + \phi) \longrightarrow U_m e^{j(2\pi ft + \phi)}$$

Сурет 2 - Эйлер формуласы арқылы косинус функциясының комплекс экспоненциал түрінде жазылуы

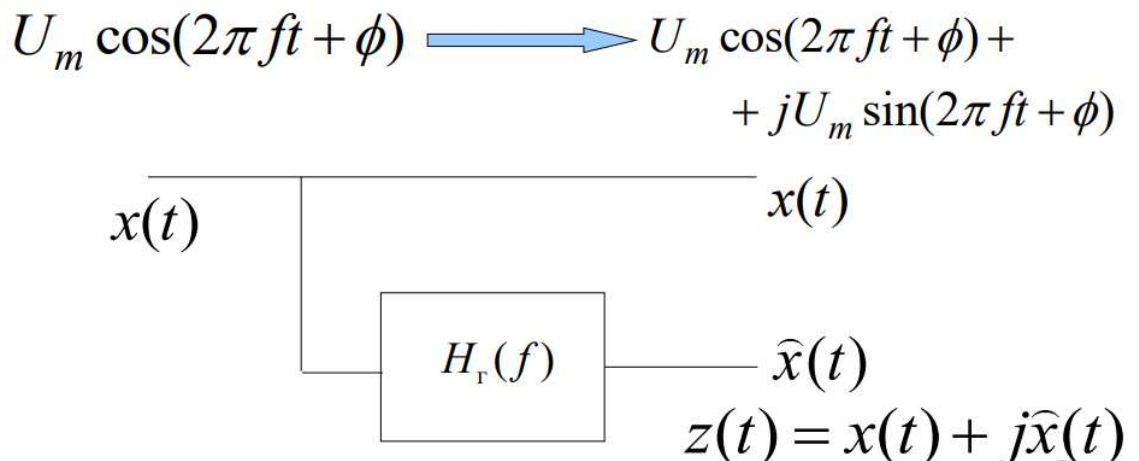
Косинус сигнал екі бағытта «айналатын» тербелістен (оң және теріс) тұрады. Аналитикалық сигнал — тек оң бағыттағы айналымды (жиілікті) қалдырып, теріс жиілікті алып тастайды. Бұл байланыс жүйелерінде, әсіресе модуляция кезінде, сигналдарды өңдеуді оңайлатады. Ерікті толқын пішіндері гармоникадан «құрылады». Осыдан теріс жиілік компонентін басу және оң жиілік компонентін екі еселеу керектігі шығады.

Төменгі 3-суретте сигналды **аналитикалық сигналға түрлендіретін жиілік сипаттамасы бар жүйе** бейнеленген. Ол жүйе $H(f)$ деп аталады және оның жұмыс істеу принципі төменгі графикте көрсетілген.



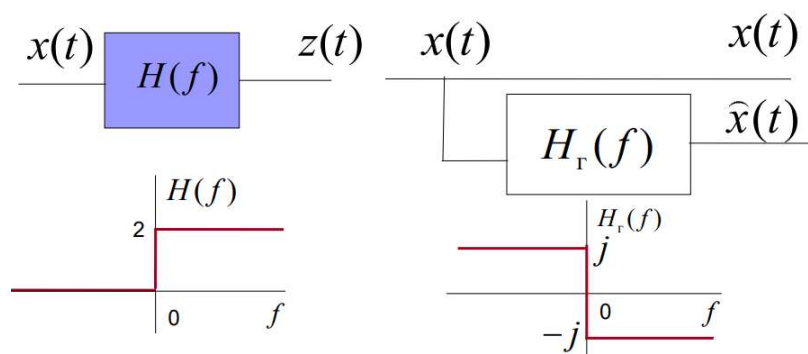
Сурет 3 - $H(f)$ — амплитуда - жиілік сипаттамасы

Бұл жүйе **аналитикалық сигналды құратын жүйе** ретінде жұмыс істейді. Нақты сигнал $x(t)$ оң және теріс жиіліктерді қамтиды. Жүйе теріс жиіліктерді алып тастап, оң жиіліктерді **екі есеге көбейтеді**. Нәтижесінде шығыс сигналы $z(t)$ — нақты сигналдың **аналитикалық түрі** болады: $z(t)=x(t)+j\cdot\hat{x}(t)$ (Сурет 4). Мұндағы $\hat{x}(t)$ — бастапқы сигналдың Гильберт түрлендіруі.



Сурет 4 – Аналитикалық сигналды алудың жолы

Бұл сүзгі жиілік облысында аналитикалық сигналды алуға арналған: $H(f)$ — идеал аналитикалық сүзгінің сипаттамасы (Сурет 5). Ол тек оң жиіліктерді өткізіп, екі есе күшейтеді, ал теріс жиіліктерді басады.



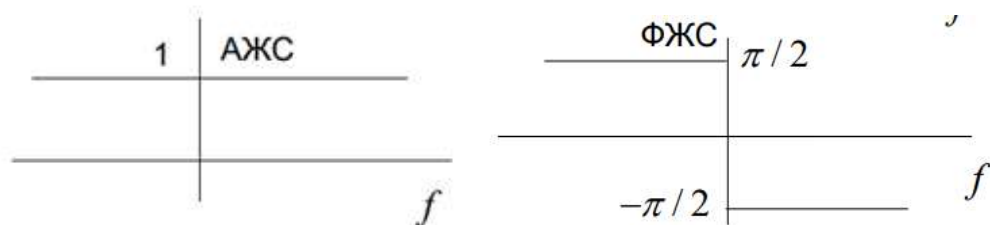
$$\begin{cases} f < 0: j\hat{X}(f) = -X(f) \\ f \geq 0: j\hat{X}(f) = X(f) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \hat{X}(f) = jX(f) \\ \hat{X}(f) = -jX(f) \end{cases}$$

Сурет 5 – Идеалды сүзгінің жиіліктік сипаттамасы

Мұндай сүзгі байланыс жүйелерінде сигналды спектрлік өңдеуде, модуляция/демодуляцияда маңызды рөл атқарады.

Сигнал кез келген толқын формасын гармоникалардың қосындысы ретінде көрсетуге болады. Комплексті түрдегі жазылым теріс жиілікті компоненттерді басуға және оң жиіліктерді екі есе арттыруға мүмкіндік береді. Сонымен сурет 5 –те көрсетілгендей Гильберт түрлендіруінің жиіліктік сипаттамасы келесідей болатыны көруге болады:

$$H_r(f) = \begin{cases} j, & f < 0, \\ -j, & f \geq 0. \end{cases}$$



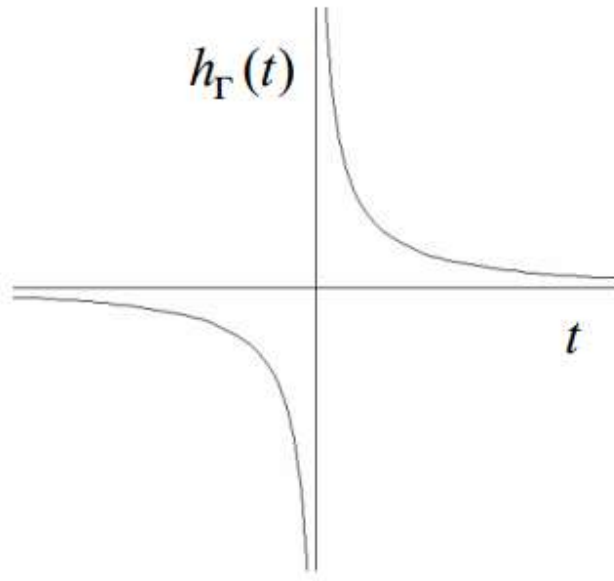
Сурет 6 – Гильберт түрлендіруінің амплитуда және фаза – жиіліктік сипаттамалары

Гильберт түрлендіруінің импульстік сипаттамасын жиіліктік сипаттаманы Фурье кері түрлендіруін пайдаланып алуға болады:

$$h_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{\pi t}$$

Оның графигі төменгі 7-суретте бейнеленген. Осы импульстік сипаттаманы пайдаланып Гильберт түрлендіруінің сигналын алуға болады:

$$\hat{x}(t) = x(t) * h_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_r(t - \tau) d\tau$$



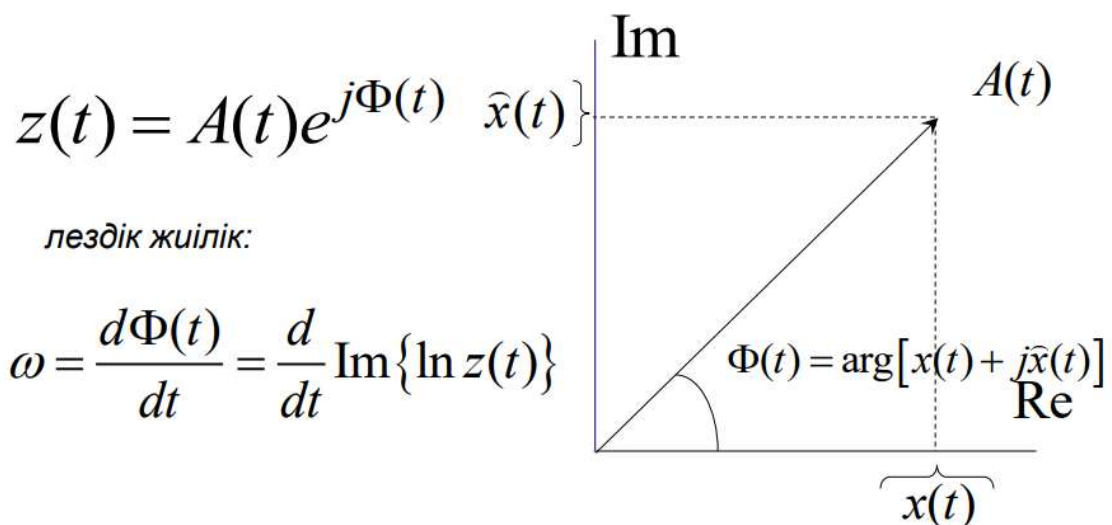
Сурет 7 – Гильберт түрлендіруінің импульстік сипаттамасы

Осы формулаға жоғарыдағы алынға Гильберт импульстік сипаттамасын қойсақ Гильберт түрлендіруінің жұбын алуға болады:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

Гильберт түрлендіруінің жұбын пайдаланым жалпы экспоненциалды түрдегі аналитикалық сигналды алуға болады. Оның графикалық түсіндірмесі 8-суретте келтірілген.



Сурет 8 – Экспоненциалды түрдегі аналитикалық сигнал параметрлері

Сандық байланыс жүйелерінде көбінесе сигнал квадратуралық формада көрсетіледі: $x(t) = u(t)\cos(\omega t) + v(t)\sin(\omega t)$. Оны квадратуралық компоненттерге жіктеу үшін Гильберт түрлендіруі пайдаланылуы керек. Мұндағы:

$u(t)$ — инфазалық (нақты, $\cos$) компонент;

$v(t)$ — квадратуралық (жалған, $\sin$) компонент.

Аналитикалық сигнал квадратуралық компонентпен тығыз байланысты $z(t) = A(t)e^{j\phi(t)} = u(t) + jv(t)$.

Сигналдың квадратуралық компоненттерін табуға мысал келтірейік, мысалы мынадай модуляцияланған сигналды квадратуралық компонентке жіктейік:

$$\begin{aligned}
 x(t) \cos(2\pi F_0 t) &= u(t) \cos^2(2\pi F_0 t) - v(t) \sin(2\pi F_0 t) \cos(2\pi F_0 t) = \\
 &= u(t) \frac{(1 + \cos(2 \cdot 2\pi F_0 t))}{2} - v(t) \frac{\sin(2 \cdot 2\pi F_0 t)}{2} \rightarrow \frac{u(t)}{2}
 \end{aligned}$$

Төменгі жиілікті сүзгіні пайдаланып квадратуралық компонентін бөліп ала аламыз (Сурет 9).

7. Кездейсоқ процестер

Кездейсоқ процесс — уақыт бойынша өзгертін, нәтижесі кездейсоқ болатын құбылыс. Әрбір нақты іске асыру элементар оқиғаға сәйкес келеді.

8. Стационарлық және стационарлық емес процестер

Стационар процесс: кез келген уақытта статистикалық сипаттамалары өзгермейді. Стационар емес: орташа мәні немесе дисперсиясы уақытқа тәуелді.

9. Автокорреляциялық функция (АКФ)

$R_x(\tau) = E\{x(t)x(t + \tau)\}$ — сигналдың өз-өзіне қатысты тәуелділігін сипаттайды.

10. Винер–Хинчин теоремасы

$$S_x(f) = \int R_x(\tau) * \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

$$R_x(\tau) = \int S_x(f) * \exp(j2\pi f\tau) df$$

11. Корреляция интервалы және спектр ені

Корреляция интервалы — сигнал тәуелділігі сақталатын уақыт аралығы. Тиімді спектр ені — қуатының шоғырланған жиілік диапазоны.

12. Шуыл модельдері

Ақ шуыл — нөлдік орташа мән және тұрақты спектр. Квази-ақ шуыл — жиілік бойынша шектелген.

13. Дискретті кездейсоқ процесс

Цифрлық жүйелерде сигнал дискреттеліп қарастырылады: $x[n]$. Спектр Дискретті Фурье Түрлендіру арқылы есептеледі.

14. Сызықты инвариантты жүйеге әсері

Сигнал жүйеден өткенде: $S_y(f) = |H(f)|^2 * S_x(f)$

15. Импульс және спектр

Сигнал ұзақ болған сайын спектрі тар болады. Қысқа импульс кең спектрге ие болады.

Бақылау сұрақтары

1. Аналитикалық сигнал деген не?
2. Комплексті амплитуданың мағынасы қандай?
3. Гильберт түрлендіруі қалай орындалады?
4. Стационар және стационар емес процестердің айырмашылығы қандай?
5. АКФ не үшін қолданылады?
6. Винер–Хинчин теоремасын тұжырымдаңыз.
7. Шуыл модельдерін атаңыз.
8. Сызықты жүйе сигналға қалай әсер етеді?